

LE NOMBRE D' Φ & L'ART

⊞ Objectifs & notions mathématiques utilisées dans les activités.

⊞ Liste des fichiers joints.

----- *Je découvre... Des questions ???*

⊞ 4 fiches comportant 10 activités pour découvrir le nombre d'or.

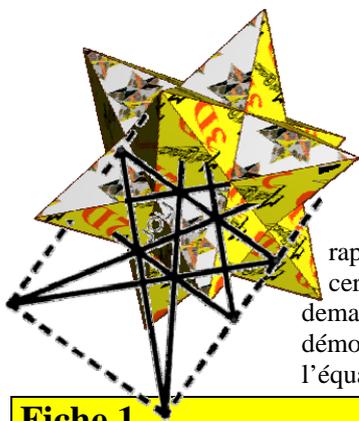
⊞ Parcours mathématique de l'exposition d'œuvres de Georges FOLMER : des questions. (sans image)

----- *Des réponses...*

⊞ Des réponses aux 4 fiches comportant 10 activités pour découvrir le nombre d'or dont les « *trous d'aiguilles géométriques d'or* ».

⊞ Parcours mathématique de l'exposition d'œuvres de Georges FOLMER : des réponses. (sans image)

Sommaire :



Objectifs & notions mathématiques utilisées dans les activités. *Fichiers *.pdf*

Dans le cadre de l'histoire des arts au collège ou pour la culture mathématique en rapport avec les arts au collège et au lycée, les activités ci-après peuvent être proposées, pour certaines à partir de la 4^{ème}. Cela dit, elles sont plus appropriées à partir de la 3^{ème}. Ces activités demandent l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique : *GeoGebra*. Au lycée, des démonstrations complémentaires pourraient être demandées comme, par exemples, la résolution de l'équation du second degré de solution phi et celle concernant la suite de Fibonacci.

Fiche 1

Objectif : découvrir le nombre d'or à l'aide de la géométrie plane et le nombre d'or comme proportion.

| | | |
|--|-------------------|--|
| | Activité 1 | Propriétés du carré et du rectangle, théorème de Pythagore, racines carrées, valeur exacte et valeur arrondie. |
| | Activité 2 | Diagonales d'un carré et d'un rectangle, racines carrées, identité remarquable, théorème de Thalès, expression "en fonction de" : calcul littéral. |

Fiche 2

Objectif : découvrir le nombre d'or dans les polygones

| | | |
|--|-------------------|--|
| | Activité 3 | Propriétés d'un triangle isocèle, description d'un pentagone régulier convexe. |
| | Activité 4 | Valeur arrondie, angles d'un polygone régulier convexe, angles au centre et angles inscrits (dont propriétés). |

Fiche 3

Objectif : découvrir le nombre d'or comme la limite d'une suite de rapports

| | | |
|--|-------------------|---|
| | Activité 5 | Rapports de longueurs, découverte de la suite de Fibonacci. |
|--|-------------------|---|

Objectif : « voir » des sections dorées dans des œuvres d'art de Georges FOLMER à l'aide de la géométrie : « trous d'aiguilles géométriques d'or ».

| | | |
|--|-------------------|--|
| | Activité 6 | Modélisation d'une situation problème, théorème de Thalès. |
|--|-------------------|--|

Objectif : à l'aide du logiciel GeoGebra, « voir » ou « trouver » plus facilement des sections dorées dans les œuvres d'art de Georges FOLMER

| | | |
|--|-------------------|---|
| | Activité 7 | Un logiciel de géométrie dynamique au service de l'art... (culture mathématique). |
|--|-------------------|---|

Fiche 4

| | | |
|--|-------------------|------------------------------|
| | Activité 8 | Culture mathématique et art. |
|--|-------------------|------------------------------|

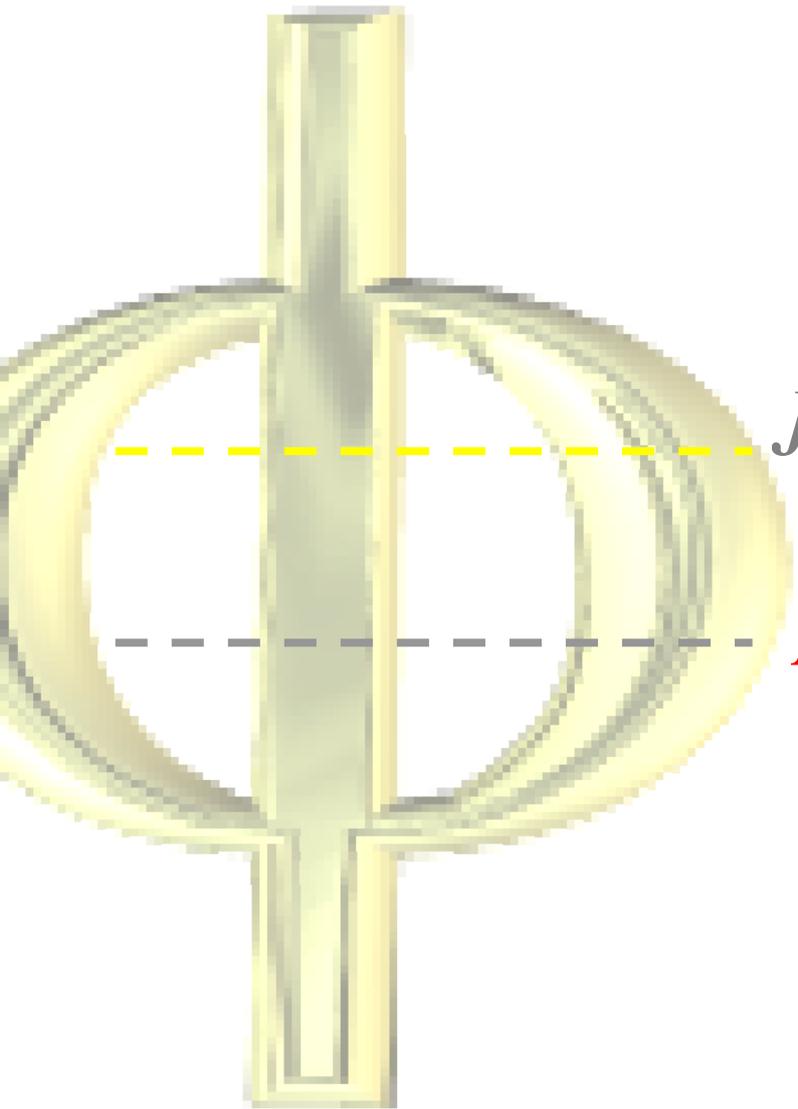
Objectif : le nombre d'or dans des polyèdres construits par Georges FOLMER.

| | | |
|--|--------------------|--|
| | Activité 9 | Dodécaèdre, construction en 3D (patron), petit dodécaèdre étoilé : démarche expérimentale en groupe pour en construire un. |
| | Activité 10 | Etoile de Kepler : démarche expérimentale en groupe pour en construire une et calculer son volume. |



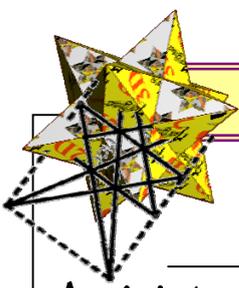
Liste des fichiers joints : *.ggb & *.jpg.

| | | | |
|----|--|----|--|
| 1 | 01-folmer-cruche-polyedre-noir-rectangle-or-question.ggb | 13 | 07-folmer-composition-bleue-pentagone-question.ggb |
| 2 | 01-folmer-cruche-polyedre-noir-rectangle-or-reponse.ggb | 14 | 07-folmer-composition-bleue-pentagone-reponse.ggb |
| 3 | 02-folmer-fleurs-d_or-rectangle-or-question.ggb | 15 | 1933-35-cruche-polyedre-noir-02-640x920mm.jpg |
| 4 | 02-folmer-fleurs-d_or-rectangle-or-reponse.ggb | 16 | 1936-38-fleurs-d_or-800x650mm.jpg |
| 5 | 03-folmer-fleurs-d_or-sections-dorees-question.ggb | 17 | 1940-42-composition-bleue-480x460mm.jpg |
| 6 | 03-folmer-fleurs-d_or-sections-dorees-reponse.ggb | 18 | 1941-1942-symphonie-harmonique-700x880mm.jpg |
| 7 | 04-folmer-fleurs-d_or-fibonacci-question.ggb | 19 | modelisation-activite.ggb |
| 8 | 04-folmer-fleurs-d_or-fibonacci-reponse.ggb | 20 | nbre-or-art-fibonacci.ggb |
| 9 | 05-folmer-symphonie-harmonique-rectangle-or-question.ggb | 21 | nbre-or-art-rectangle-or.ggb |
| 10 | 05-folmer-symphonie-harmonique-rectangle-or-reponse.ggb | 22 | nbre-or-art-sections-dorees.ggb |
| 11 | 06-folmer-composition-bleue-rectangle-or-question.ggb | 23 | nbre-or-barlong-rect-or.ggb |
| 12 | 06-folmer-composition-bleue-rectangle-or-reponse.ggb | 24 | nbre-or-barlong-rect-or-traces.ggb |



Je découvre...

Des questions ? ? ?

Découvrir le nombre d'or à l'aide de la géométrie plane et le nombre d'or comme proportion.**Activité 1 :** avec le logiciel *GeoGebra*, dans un fichier qui sera nommé« **nbre-or-barlong-rect-or.ggb** », en utilisant la géométrie dynamique, suivre les étapes ci-après.

- 1) Placer deux points libres dans le plan J et O. Tracer [JO] et nommer JO sa longueur.
- 2) Placer M le milieu de [JO] et construire deux carrés accolés JMNR et MOQN.

Les deux carrés accolés forment un rectangle JOQR appelé « *rectangle de barlong* »

- 3) Tracer sa diagonale [RO].

On pose $JR = \frac{1}{2}$ unité et $JO = 1$ unité.

- 4) A l'écrit, déterminer la valeur exacte de sa longueur RO en unités en utilisant un théorème bien connu et sachant que pour tous nombres

positifs a et b avec $b \neq 0$, on a $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

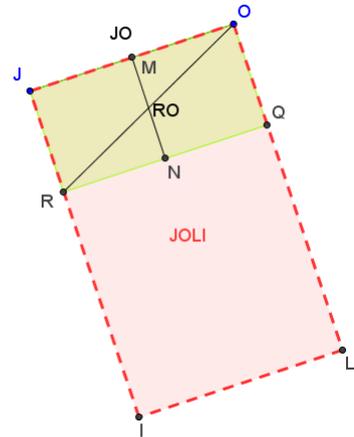
- 5) Placer le point I tels que J,R et I soient alignés dans cet ordre et $JI = JR + RO$. Afficher la valeur de JI.
- 6) A l'écrit, déterminer la valeur exacte de JI.

Ce nombre est appelé nombre d'or.

On le note « *Phi* », lettre grecque : $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

- 7) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur arrondie au millième de $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

- 8) Placer le point L tel que JOLI forme un rectangle.

Comme on trouve Φ dans le rectangle JOLI, alors JOLI est un « *rectangle d'or* ».**Activité 2 :** avec le logiciel *GeoGebra*, ouvrir le fichier nommé « **nbre-or-art-rectangle-or.ggb** », enregistrer sous « **nbre-or-art-rectangle-or.ggb** », en utilisant la géométrie dynamique, suivre les étapes ci-après.

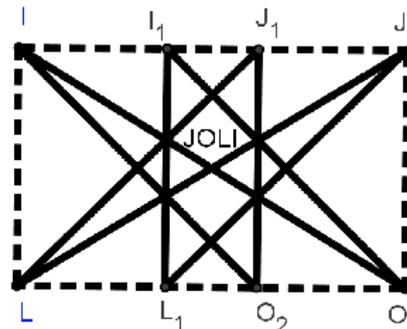
- 1) Désafficher [RO], [MN], M, N, R et Q.
- 2) Construire le carré J_1O_2LI tel que $J_1 \in [IJ]$ et $O_2 \in [OL]$.
- 3) Construire le carré JOL_1I_1 tel que $I_1 \in [IJ]$ et $L_1 \in [OL]$.
- 4) Tracer les diagonales du rectangle JOLI.
- 5) Tracer les diagonales des carrés J_1O_2LI et JOL_1I_1 .
- 6) Placer J_2 le point d'intersection entre [LJ] et $[J_1O_2]$.
- 7) Placer J_3 le point d'intersection entre $[I_1O]$ et $[J_1O_2]$.

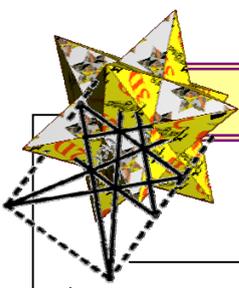
On rappelle que $IJ = \Phi$ et $IL = 1$.

- 8) Donner les rapports de Thalès dans le triangle JOL en fonction de Φ .
- 9) Donner les rapports de Thalès dans le triangle I_1OL_1 en fonction de Φ .

- 10) Vérifier que $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$ sachant que $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. (Demander un indice si nécessaire)

- 11) Que peut-on dire des points J_2 et J_3 ? Le démontrer. (Demander un indice si nécessaire)

Les lignes tracées dans ce rectangle d'or sont souvent utilisées par ceux qui analysent les tableaux de peinture classiques ou modernes. Le peintre a, très souvent, caché (sciemment ou non) des rapports d'or dans sa composition. On peut constater qu'il existe de nombreux rapports égaux à « Phi » dont, entre autres, $\frac{\text{longueur du rectangle d'or}}{\text{largeur du rectangle d'or}} = \frac{JO}{OL} = \Phi$ mais aussi $\frac{JO}{J_2O_2} = \Phi$, etc.On parle alors de proportion et de « *Proportion divine* ».Des infos sur le site : <http://www.mathactivite.fr>



Découvrir le nombre d'or dans les polygones

Activité 3 : avec le logiciel *GeoGebra*, ouvrir le fichier nommé « nbre-or-barlong-rect-or.ggb », enregistrer sous « nbre-or-art-sections-dorees.ggb », en utilisant la géométrie dynamique, suivre les étapes ci-après.

- 1) Placer 2 points libres dans le plan A et B puis construire le pentagone régulier ABCDE à l'aide de l'icône automatique de *GeoGebra*. Décrire ABCDE.
- 2) Tracer le triangle EBD et afficher ses angles. Décrire EBD.
- 3) Tracer les triangles ABE et BCD, puis afficher leurs angles. Décrire ABE et BCD.

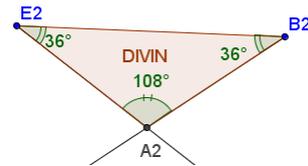
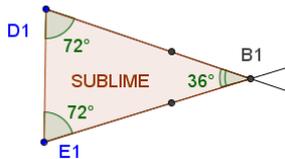
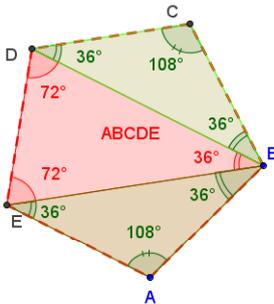
Le pentagone régulier ABCDE est constitué des trois triangles précédents. Dans ces triangles, on trouve Φ . Si $AB = 1$ alors $EB = BD = \Phi$.

Bouger les points A et B pour en faire le constat.

Comme on trouve Φ alors ils sont des triangles d'or.

EBD est le triangle dit « sublime » (ou « triangle d'Euclide »), et ABE et BCD des triangles dits « divins ».

- 4) A partir des constats faits sur les angles aux questions 2) et 3), construire, indépendamment du pentagone, un triangle dit « sublime » $E_1B_1D_1$ et un triangle dit « divin » $A_2B_2E_2$.



Activité 4 : avec le logiciel *GeoGebra*, ouvrir le fichier nommé « nbre-or-art-sections-dorees.ggb », en utilisant la géométrie dynamique, suivre les étapes ci-après.

- 1) Dans le pentagone régulier ABCDE, tracer les segments [AC], [CE] et [DA].

ACEBD est un pentagone régulier étoilé appelé aussi « pentagramme ».

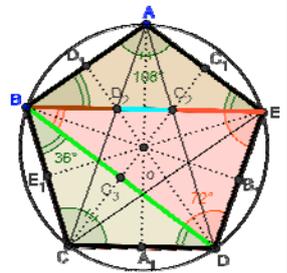
- 2) Dans le pentagone régulier ABCDE, on trouve Φ . Si $AB = 1$ alors $AC = CE = EB = BD = DA = \Phi$,

Afficher les longueurs et bouger les points A et B pour en faire le constat.

- 3) Placer C_2 le point d'intersection entre [DA] et [EB].
- 4) Placer D_2 le point d'intersection entre [AC] et [EB]. Tracer $[C_2D_2]$.
- 5) Donner une valeur arrondie au millième de Φ^2 et Φ^3 .

- 6) Dans le pentagone régulier ABCDE, on trouve Φ , Φ^2 et Φ^3 .
Si $D_2C_2 = 1$ alors $C_2E = \Phi$, $AE = \Phi^2$ et $EB = \Phi^3$.

Afficher les longueurs précitées et bouger les points A et B pour en faire le constat.



- 7) En plus des propriétés du pentagone régulier découvertes dans l'activité précédente concernant ses angles et ses longueurs de côtés, le pentagone régulier est inscrit dans un cercle. Trouver le centre de ce cercle. Le nommer O. Narrer sa construction à l'écrit.

- 8) Quelles sont les mesures des angles \widehat{AOB} , \widehat{BOC} , \widehat{COD} , \widehat{DOE} et \widehat{EOA} ? Que constate-t-on ?

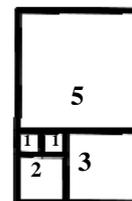
- 9) \widehat{AOE} est l'angle au centre qui intercepte le même arc que les angles \widehat{ABE} , \widehat{ACE} et \widehat{ADE} .
Que constate-t-on ?



Découvrir le nombre d'or comme la limite d'une suite de rapports.

Activité 5 : avec le logiciel GeoGebra, créer un fichier nommé « nbre-or- fibonacci.ggb », en utilisant la géométrie dynamique, suivre les étapes ci-après.

- 1) Construire un carré ABCD de côté 1.
Afficher la valeur de AB.
- 2) Construire le carré AEFB distinct de ABCD.
Afficher la valeur de FB. Afficher la valeur de $\frac{FB}{AB}$.
- 3) Construire le carré FGHC tel que les carrés précédents soient à l'extérieur de lui.
Afficher la valeur de CH. Afficher la valeur de $\frac{CH}{FB}$.
- 4) Construire le carré DHKP tel que les carrés précédents soient à l'extérieur de lui.
Afficher la valeur de DP. Afficher la valeur de $\frac{DP}{CH}$ arrondie au millième.
- 5) Construire le carré EPST tel que les carrés précédents soient à l'extérieur de lui.
Afficher la valeur de TE. Afficher la valeur de $\frac{TE}{DP}$ arrondie au millième.
- 6) Construire le carré GTUV tel que les carrés précédents soient à l'extérieur de lui.
Afficher la valeur de VG. Afficher la valeur de $\frac{VG}{TE}$ arrondie au millième.
- 7) Construire le carré KVWX tel que les carrés précédents soient à l'extérieur de lui.
Afficher la valeur de XK. Afficher la valeur de $\frac{XK}{VG}$ arrondie au millième.
- 8) Que remarque-t-on quant aux rapports affichés et Φ ?



Les nombres $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots\}$ sont les premiers termes d'une suite appelée « suite de Fibonacci ». Chaque terme de cette suite est la somme des deux précédents. On dit que la limite en plus l'infini du rapport entre deux termes consécutifs (le plus grand sur le plus petit) tend vers Φ .

« Voir » des sections dorées dans des œuvres d'art de Georges FOLMER ?

Activité 6 : compléter le parcours mathématique « papier » proposé, aidé des

« trous d'aiguilles géométriques d'or » en visitant l'exposition d'œuvres de Georges Folmer. A ce propos, un visiteur, plaçant les « trous d'aiguilles » à une distance de 30 cm de son œil, souhaite faire superposer un rectangle d'or de longueur 7,5 cm sur une œuvre de Folmer de 80 cm de hauteur, à quelle distance idéale du tableau devra-t-il être ?

A l'aide du logiciel GeoGebra, « voir » ou « trouver »

plus facilement des sections dorées dans les œuvres d'art de Georges FOLMER

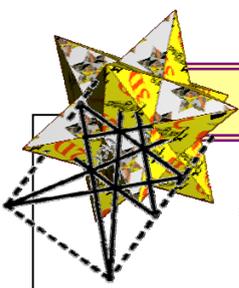
Activité 7 : Avec le logiciel GeoGebra, ouvrir le fichier nommé « nbre-or-art-rectangle-or.ggb » et en utilisant la géométrie dynamique, suivre les étapes ci-après.

- 1) Mettre la figure construite en « calque 1 » en cliquant droit sur elle, puis « propriétés » puis « avancé » puis « calque » choisir « 1 » avec la flèche.
- 2) Placer un point le plus en bas à gauche dans la fenêtre « GeoGebra » et le nommer « point_bas », puis placer un point le plus en haut à gauche dans la fenêtre « GeoGebra » et le nommer « point_haut ».
- 3) Insérer une image d'œuvre d'art en cliquant sur l'icône « insérer une image » puis cliquer sur le « point_bas ». Sélectionner l'image choisie et « ouvrir ». Cliquer droit sur l'image puis « propriétés » puis « position » puis, pour le « coin 4 » choisir « point_haut ». Toujours dans les propriétés, dans l'onglet « avancé » puis « calque » choisir « 0 » avec la flèche.
- 4) Superposer sur les images des œuvres proposées, un rectangle d'or.
- 5) En faire de même avec les autres fichiers dont « nbre-or-art-sections-dorees.ggb ».

Ainsi, il est possible de « confirmer » ce qui a été repéré dans l'activité 6.

Des infos sur le site :

<http://www.mathactivite.fr>



Activité 8 : Recherche documentaire : sur Internet, chercher des informations sur « le nombre d'or » et les éléments encadrés dans les fiches 1, 2 et 3. Ecrire celles comprises et noter les références des sites et des auteurs.

Le nombre d'or dans des polyèdres construits par Georges FOLMER.

En 1950, dans l'atelier de Georges FOLMER, au moins deux polyèdres étaient suspendus au plafond : un petit dodécaèdre étoilé et une étoile de Kepler. Ils sont en photographie dans le catalogue « Georges Folmer (1895-1977) A retrospective », catalogue en anglais, WATERHOUSE & DOD, London 15th April - 2nd May 2008.

ACTIVITES de groupe

Activité 9 : du dodécaèdre au petit dodécaèdre étoilé.

Le dodécaèdre est l'un des cinq solides de Platon, les autres étant : le tétraèdre, le cube (ou hexaèdre), l'octaèdre et l'icosaèdre. Ils ont tous un lien avec Φ .

- 1) Observer un **dodécaèdre** et le décrire (nature des faces, nombres de faces, d'arêtes et de sommets).
- 2) Quel est le lien entre ce polyèdre et le nombre d'or ?
- 3) En groupe, écrire un programme de construction d'un patron du dodécaèdre et le faire.
- 4) Observer un **petit dodécaèdre étoilé** et le décrire (nature des faces, nombres de faces, d'arêtes et de sommets, etc.).



Le petit dodécaèdre étoilé est l'un des « oursins » de Johannes Kepler.

- 5) Quel est le lien entre ce polyèdre et le nombre d'or ?
- 6) En groupe, écrire un programme de construction d'un patron du petit dodécaèdre étoilé et le faire.
- 7) Anecdote :

« Lors d'un entretien, Catherine Folmer-Santoni m'a dit avoir joué avec des polyèdres étoilés et s'être fait gronder par son père Georges Folmer pour avoir écorné les pointes. Elle m'a précisé aussi que l'irrégularité du pentagone dessiné à l'intérieur du polyèdre noir dans l'œuvre d'art « la cruche au polyèdre noir » pouvait être une maladresse. »*

Au regard des activités 6 et 7 faites précédemment et aux photos ci-dessous, qu'en pensez-vous ?

Extrait de l'œuvre de Georges Folmer de 1933-35 :
Cruche au polyèdre noir
(640 x 920 mm)



Photographie* d'un petit dodécaèdre étoilé bien régulier mais cassé (comme inachevé) et déformé.

Activité 10 : du tétraèdre et de l'octaèdre à l'étoile de Kepler.

Soit ABCS une pyramide régulière. Ces arêtes sont toutes de la même longueur 3 cm.

- 1) Représenter en perspective cavalière ABCS.
- 2) Décrire ABCS.
- 3) Réaliser un patron, dit aussi développement, de la pyramide ABCS et l'assembler.
- 4) Avec tes camarades, coller des tétraèdres réguliers sur chaque face d'un octaèdre régulier de longueur d'arêtes 3 cm. L'octaèdre (solide de Platon) est à décrire et à construire.

Ce nouveau polyèdre assemblé est une étoile de Kepler (stella octangula) qui est l'autre « oursin » de Johannes Kepler.

- 5) Observer ce nouveau solide et le décrire.
- 6) Qui étaient Johannes Kepler et Platon ?
- 7) Calculer le volume de cette étoile de Kepler (donner le résultat en cm^3 arrondi au mm^3 près) . Modéliser la situation et narrer sa recherche.

Indice : les 8 pointes de l'étoile de Kepler correspondent aux sommets d'un cube dont les diagonales coïncident avec les arêtes de l'étoile.



Des infos sur le site : <http://www.mathactivite.fr>



Le NOMBRE D' Φ R ? dans des œuvres de

Des questions... Georges FOLMER Mathématiques et histoire des arts...

Parcours mathématique de l'exposition temporaire d'œuvres de Georges Folmer
au musée des beaux-arts de Rennes - Rennes, du 10 février au 23 mai 2010.

Document de Carole LE BELLER, professeure de mathématiques.

Sommaire

Préambule avec une courte notice des
« trous d'aiguilles géométriques d'or »

p.1

- ◆ 4 œuvres du parcours :
 - 1 933-35 – Cruche au polyèdre noir
 - 1 936-38 – Fleurs d'or
 - 1 941-42 – Symphonie harmonique
 - 1 940-42 – Composition bleue

p.2 et 3

- ◆ Bibliographie.
Quelques liens Internet.

p.3

- ◆ Petit lexique pour tous...

p.4

Après... & Coordonnées.

p.4

« Trous d'aiguilles » imprimés sur des feuilles
transparentes.*

Préambule

Après avoir réalisé des activités et calculs conduisant à la construction des figures géométriques d'or ci-dessous avec le logiciel de géométrie dynamique « GeoGebra », le nombre d'or commence à intriguer. Ce parcours mathématique de l'exposition temporaire d'œuvres de Georges Folmer, artiste peintre (1895-1977) (cf. dossier ressources arts plastiques sur le site du musée) permet de découvrir dans des peintures l'utilisation de cette « divine proportion » appelée ainsi par Luca Pacioli dans son livre *Divine proportion* (Venise, 1509) illustré par Léonard de Vinci qui la désigna par l'expression *sectia aurea* : « section dorée ».

Les « trous d'aiguilles » ci-dessous permettront, en se plaçant à une bonne distance des œuvres, en fermant un œil et en regardant avec l'autre au travers chaque figure comme dans un trou d'aiguille, de superposer des polygones singuliers sur les œuvres et de découvrir des diagrammes semblant avoir été établis par Georges Folmer.

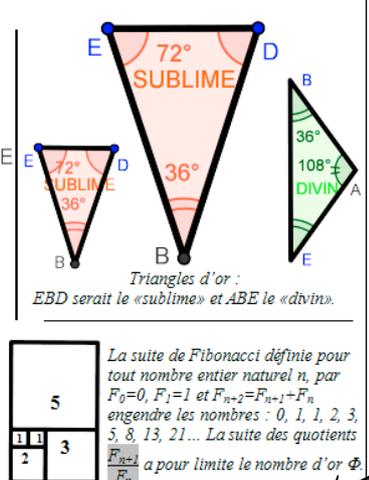
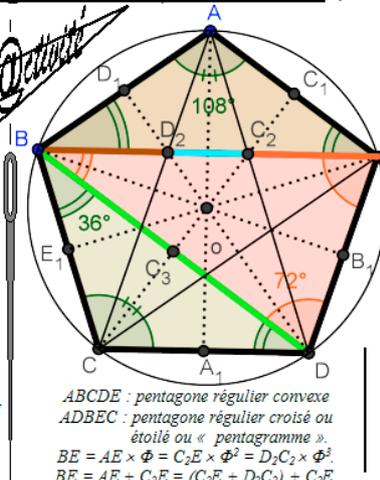
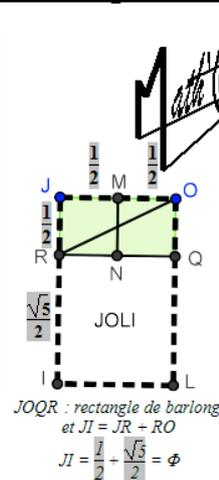
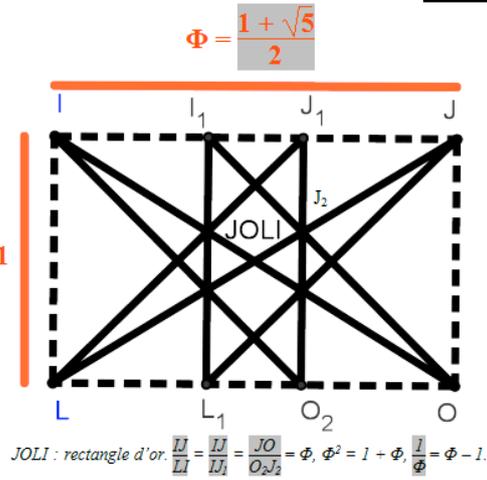
Ces constats ne pourront être que des hypothèses de construction des tableaux car sans écrits de Georges Folmer à ce sujet, ni les trous d'aiguilles, ni un travail de superposition numérique effectué à la suite du parcours, n'auront valeur de preuve.

Valeur exacte du nombre d'or Phi :

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

« Trous d'aiguilles géométriques d'or »

pour voir les sections dorées...



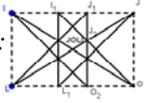
* : téléchargement du fichier sur le site :
<http://www.mathactive.fr>



Œuvres :

1) 1 933-35 – Cruche au polyèdre noir⁽¹⁾ – Mesures de l'œuvre : 64 × 92 cm

Indice :



?

Image à télécharger sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Quels semblent être les solides posés sur la table ?

Réponse :

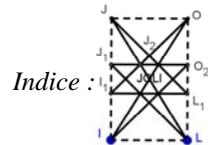
?

La perspective utilisée est-elle cavalière ? Pourquoi ?

Réponse :

?

A l'aide des « trous d'aiguilles géométriques d'or », se placer à une bonne distance pour superposer sur l'œuvre le « rectangle d'or ». Puis, sur l'image ci-contre, le dessiner à main levée avec les diagonales mettant en évidence des rapports d'or.



2) 1 936-38 – Fleurs d'or⁽¹⁾ – Mesures de l'œuvre : 80 × 65 cm

A l'aide des « trous d'aiguilles géométriques d'or », se placer à une bonne distance pour superposer sur l'œuvre le « rectangle d'or ». Puis, sur l'image centrale ci-dessous, le dessiner à main levée avec les diagonales mettant en évidence des rapports d'or.

Sur les zooms, après avoir repéré des triangles d'or (dits « sublime » et « divin »), un rectangle d'or autre que le précédent, la moitié d'un trapèze d'or (partie du pentagone régulier convexe) et une suite de carrés additifs correspondant aux premiers termes de la suite de Fibonacci, les dessiner à main levée.

?

Image à télécharger sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Zoom 1 : la moitié d'un trapèze d'or.

?

Image à télécharger sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

?

Image à télécharger sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Zoom 3 : suite de Fibonacci.

?

Image à télécharger sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Zoom 2 : des triangles d'or et un rectangle d'or.

Remarque :
?
.....
.....

?

Quels semblent être les solides bleus dessinés dans cette œuvre ?
Réponse :

?

Sont-ils tous de révolution ? Pourquoi ? Réponse :

?

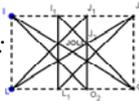
Combien semble-t-il y en avoir de révolution ? Réponse :



3) 1 941-42 – Symphonie harmonique⁽¹⁾ -

Mesures de l'œuvre : 70 × 88 cm

Indice :

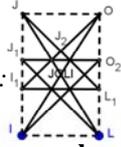


A l'aide des « trous d'aiguilles géométriques d'or », se placer à une bonne distance pour superposer sur l'œuvre le « rectangle d'or ». Puis, sur l'image ci-dessous, le dessiner à main levée avec les diagonales mettant en évidence des rapports d'or.

Image à télécharger sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

4) 1 940-42 – Composition bleue⁽¹⁾ Indice :

Mesures de l'œuvre : 48 × 46 cm



A l'aide des « trous d'aiguilles géométriques d'or », se placer à une bonne distance pour superposer sur l'œuvre le « rectangle d'or ». Puis, sur l'image ci-dessous, le dessiner à main levée avec les diagonales mettant en évidence des rapports d'or.

Dans cette œuvre, quelle est la nature de la figure bleue la plus grande qui contient toutes les autres ?

Réponse :

A l'aide des « trous d'aiguilles géométriques d'or », se placer à une bonne distance pour superposer sur l'œuvre la figure précédente. Puis, sur l'image ci-dessous, tracer à main levée ses diagonales. Que constate-t-on ?

Réponse :

Image à télécharger sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Image à télécharger sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Bibliographie

⁽¹⁾ **Georges Folmer (1895-1977)** catalogue du Musée des beaux-arts de Rennes .

Georges Folmer (1895-1977) A retrospective catalogue en anglais, WATERHOUSE & DOD, London 15th April - 2nd May 2008.

Encyclopédie méthodique Larousse, tome 2, 1955, chapitre « Géométrie » page 96 à 99 : « Rapports et faisceaux harmoniques », page 97 : pleine page, œuvre de Folmer « Symphonie harmonique », édition refondue du Grand Mémento publié sous la direction de Paul Augé.

Divine proportion de Fra Luca Pacioli di Borgo San Sepolcro (1 509) – 2^{ème} édition française, traduction de G. Duchesne et M. Giraud, avec la collaboration de M.-T. Sarrade, les Compagnons du devoir, Librairie du Campagnonnage, 25 novembre 1 988.

Le nombre d'or d'André Deledicq, édition « Les malices du Kangourou », janvier 2 006 : un petit livret où l'on trouve l'essentiel, mais aussi quelques curiosités, pour faire connaissance avec ce nombre que l'on dit d'or. Entre autres : la divine proportion, les nombres et la géométrie de l'homme, le partage d'or, la construction du rectangle d'or, la peinture est d'or, les rectangles célèbres, l'unité d'angle d'or, le trièdre doré, la suite de Fibonacci, les puzzles d'or, les solutions aux problèmes, etc.

Géométrie du nombre d'or de Robert Vincent, Chalagram édition, 3^{ème} impression mars 2 001 : en partant de la corde et de la quine des bâtisseurs du Moyen-âge, Robert Vincent, par l'art du trait et sans grand outillage mathématique, ouvre les mystères du nombre d'or et expose des joyaux de la géométrie. Il rappelle des tracés antiques, souvent emblématiques et montre la présence du nombre d'or dans l'œuvre humaine (de la pyramide de Khéops au ballon de football).

Le nombre d'or de Marguerite Neveux & H.E. Huntley, collection Points Sciences, Editions du seuil, octobre 1995. Radiographie d'un mythe, suivi de La divine proportion.

Le nombre d'or, la divine proportion de Marius Cleyet-Michaud, Que sais-je ? n°1530, Puf, 13^{ème} édition, mai 2 009.

Nombre d'or et Mathématiques de Christian Hakenholz, Chalagram édition, 2^{ème} impression juin 2 007.

Le mystère des nombres d'André Warusfel, collection Points Sciences, Editions du seuil, octobre 1 961.

Quelques liens Internet :

www.mbar.org : Site du Musée des beaux-arts de Rennes.

<http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/index.htm> : les mathématiques magiques : venez au pays des Mathématiques magiques malicieuses et... très sérieuses de Thérèse EVEILLEAU dont http://pagesperso-orange.fr/THERESE.EVEILLEAU/pages/truc_mat/ un site magnifique !!

[Http://irem-old.univ-lille1.publications/fascicules/pentaetats.pdf](http://irem-old.univ-lille1.publications/fascicules/pentaetats.pdf) : lien vers un document « Le pentagone dans tous ses états » de David Boutry.

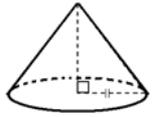
<http://123portail.education.free.fr/zip/6eme/initiation-geogebra-6-5.zip> : une initiation GeoGebra 6^{ème}-5^{ème}.

<http://www.mathactivite.fr> : dans mon site perso, vous trouverez essentiellement des activités mathématiques, "Math'@ctivités", ludiques et de construction pour tous, du concret au virtuel et du virtuel au concret : numériques, 2D, 3D et mouvement.



Petit lexique pour tous...

Cône : c'est un solide limité par une surface conique et par un plan qui ne passe pas par le point de rencontre des génératrices



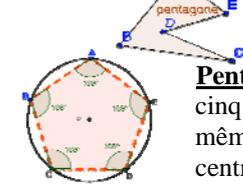
Cône de révolution : solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un de ses deux côtés de l'angle droit.

Octaèdre : polyèdre à huit faces.



Les faces de l'octaèdre régulier sont des triangles équilatéraux.

Pentagone : polygone à cinq côtés. Le pentagone ci-après est concave.

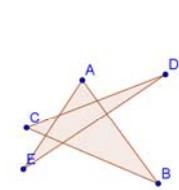


Pentagone régulier convexe : polygone ayant ses cinq angles de même mesure et ses cinq côtés de même longueur. Il est inscrit dans un cercle de centre le centre du pentagone.

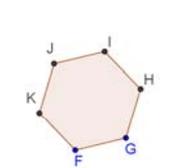
Pentagone étoilé : polygone étoilé (ou croisé) à cinq côté, « cinq branches ». Il existe un seul pentagone étoilé régulier, qui est appelé « pentagramme ».



Polygone : figure géométrique plane fermée composée de segments de droite appelés côtés. Exemple : pentagone concave (voir plus haut).



Polygone étoilé : polygone dont les angles sont alternativement saillants et rentrants, et dont les côtés forment une ligne brisée continue et fermée. Le polygone étoilé est régulier quand ses sommets sont les mêmes que ceux d'un polygone régulier et tous ses côtés ont même longueur. Exemple de polygone étoilé régulier : le pentagone étoilé régulier.



Polygone régulier : un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure ou un polygone équilatéral inscrit dans un cercle. Exemple du pentagone régulier. Exemples : triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, hexagone régulier ci-contre, etc.

Polygone convexe : un polygone n'étant traversé par aucune des droites qui supportent ses côtés.

Perspective cavalière : la perspective cavalière est une manière de représenter en deux dimensions des objets en trois dimensions (objets en volume). Cette représentation ne présente pas de point de fuite, la taille des objets ne diminue pas lorsqu'ils s'éloignent. Les segments visibles sont dessinés en traits pleins, les autres sont dessinés en pointillés. Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles. Il y a conservation de l'alignement des points et conservation des rapport de longueurs.

Petit dodécaèdre étoilé : l'un des « oursins » de Kepler baptisé par Cayley (1821-1895) « petit dodécaèdre étoilé ». C'est un polyèdre dont les douze faces sont des pentagones étoilés et n'est donc pas convexe.



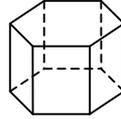
Coordonnées téléphoniques :

(Demander de pouvoir joindre Carole LE BELLER)
CLG Les Ormeaux à Rennes ☎ : 02.99.51.48.51

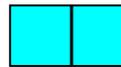
Il ne satisfait pas à la relation d'Euler ($S + F - A = 2$) car il a 12 sommets, 12 faces et 30 arêtes ($12 + 12 - 30 \neq 2$).

Polyèdre : solide limité par des faces planes polygonales. Les côtés des faces sont les arêtes du polyèdre ; chaque arête est commune à deux faces. Les extrémités des arêtes sont les sommets du polyèdre ; chaque sommet est commun à trois arêtes ou plus. Le nombre minimal de faces nécessaire pour 'enfermer' un espace fini est de quatre : le polyèdre minimal est donc le tétraèdre. **Polyèdre régulier :** un polyèdre inscrit dans une sphère et dont les faces sont isométriques.

Prisme droit : un prisme droit est un solide qui a deux faces superposables et parallèles qui sont des polygones. On les appelle les bases. Les autres faces sont des rectangles, appelés faces latérales.



Rectangle de Barlong : un rectangle composé de deux carrés superposables accolés. Sa largeur est la longueur du carré et sa longueur est le double du côté du carré.



« Rectangle d'or » : cf. : « trous d'aiguilles géométriques d'or » joints.

Section de cône : une section de cône est l'intersection d'un plan et d'un cône. On coupe le cône. La section est alors soit un cercle, une ellipse autre qu'un cercle, une hyperbole, une parabole ou un point (ce sont des coniques).

Solides de Platon : tétraèdre, cube (hexaèdre), octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre.

Sphère : une surface dont les points sont équidistants d'un point O appelé centre de la sphère. Une boule est un solide, un « intérieur plein » d'une sphère.

Suite de Fibonacci : une suite de nombres définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Chaque terme est la somme des deux précédents. Cet ensemble de nombre débute par {0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ...} et a un lien avec le nombre d'or (cf. : « trous d'aiguilles géométriques d'or » joints).

Triangles d'or dont « divin » & « sublime » : cf. : « trous d'aiguilles géométriques d'or » joints.

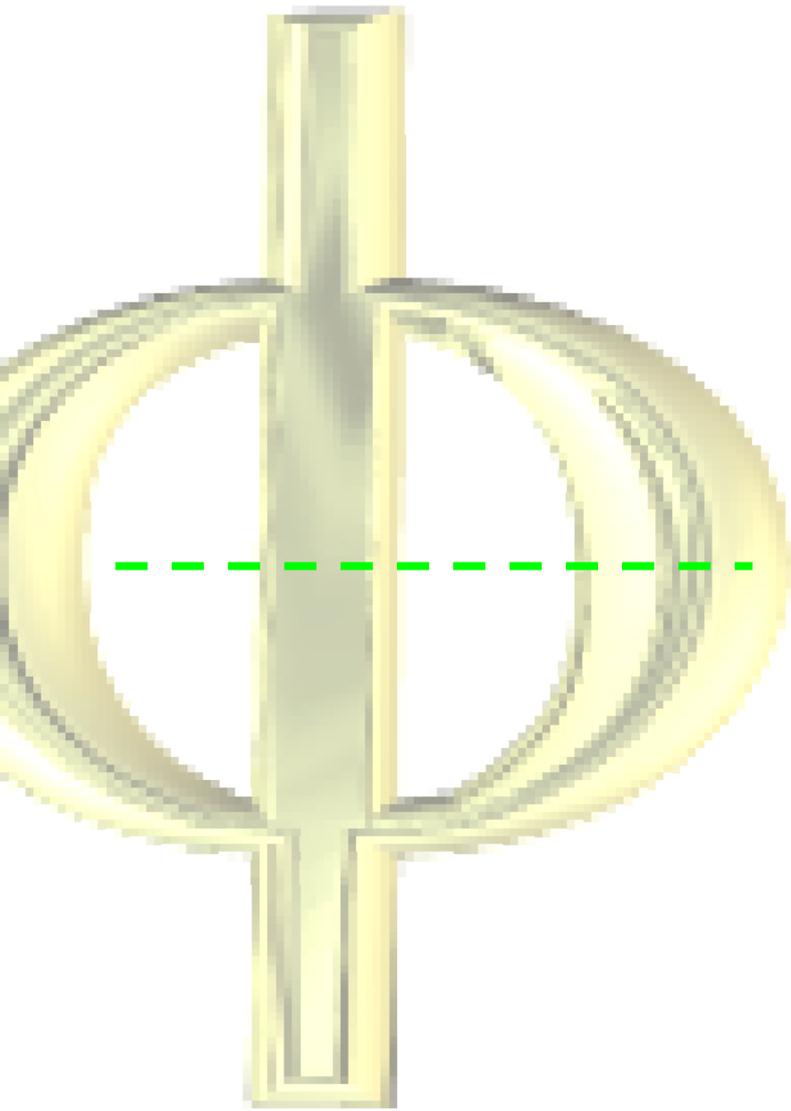
Réalisation du document, des figures (avec les logiciels *GeoGebra* et *Great Stella*) et de certaines définitions de **Carole LE BELLER**, professeure de mathématiques au collège Public Les Ormeaux à Rennes, à partir du « Dictionnaire de mathématiques élémentaires » de Stella Baruk, Editions du Seuil, septembre 1992 et d'autres livres de la bibliographie jointe. Documents en téléchargement sur son site personnel *Math'@ctivité* à l'adresse <http://www.mathactivite.fr>. Avec la participation d'Hema Rilling, professeure de mathématiques au collège Public Les Ormeaux à Rennes, uniquement pour l'écriture de certaines définitions du « Petit lexique pour tous... » à partir du livre de géométrie : « AUDIN - Géométrie- Belin » et des sites internet : « www.recreamath.qc.ca », « www.netmaths.net » et « www.wikipedia.org ».

Après...

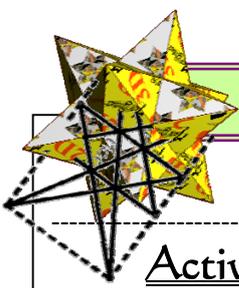
Ce parcours mathématique est ensuite réinvesti. Ayant construit les figures des « trous d'aiguilles géométriques d'or » avec le logiciel de géométrie dynamique « GeoGebra », on intégrera à ces fichiers informatiques les images des œuvres une à une. Ainsi, en bougeant les rares points libres des figures, on pourra les superposer aux œuvres et affiner les hypothèses d'analyse et, peut-être, trouver d'autres sections dorées...

Math'@ctivité
Mars 2010.





Des réponses...



Des éléments de réponses aux activités

Activité 1 :

1) 2) 3) 5) 8) voir les fichiers joints : « nbre-or-barlong-rect-or.ggb » et « nbre-or-barlong-rect-or-traces.ggb ».

4) **Données** : JOQR est un rectangle, JR = 1/2 unité et JO = 1 unité.

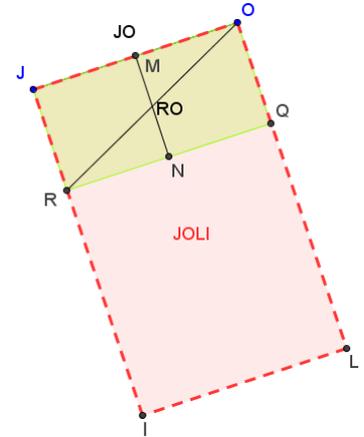
Or d'après le théorème de Pythagore, dans le triangle JOR rectangle en J, on a RO^2 = JO^2 + JR^2 d'où RO^2 = 1^2 + (1/2)^2, RO^2 = 1 + 1/4, RO^2 = 4/4 + 1/4,

RO^2 = 5/4 **Conclusion** : RO = sqrt(5/4) = sqrt(5)/sqrt(4) = sqrt(5)/2 unités

Car pour tous nombres positifs a et b avec b≠0, on a sqrt(a/b) = sqrt(a)/sqrt(b).

6) et 7) **Données** : JR = 1/2 unité, RO = sqrt(5)/2 et JI = JR + RO

JI = 1/2 + sqrt(5)/2 donc JI = (1+sqrt(5))/2 est la valeur exacte de Phi et sa valeur arrondie au millième est 1,618.



Activité 2 :

1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) voir le fichier joint : « nbre-or-art-rectangle-or.ggb ».

On rappelle que IJ = Phi et IL = 1.

8) **Données** : [J1O2] est parallèle à [JO], J2 ∈ [J1O2].

IJ = LO = Phi, IL = JO = LO2 = 1 (JOLI étant un rectangle et J1O2LI étant un carré).

Or d'après le théorème de Thalès, dans le triangle JOL, on a :

J2O2 / JO = LJ2 / LJ = LO2 / LO. On a donc en fonction de phi : J2O2 / 1 = 1 / Phi. **Conclusion** : J2O2 = 1 / Phi.

9) **Données** : [J1O2] est parallèle à [I1L1], J3 ∈ [J1O2].

IL = I1L1 = OL1 = 1, OO2 = LO - LO2 = Phi - 1 (JOLI étant un rectangle et J1O2LI étant un carré).

Or d'après le théorème de Thalès, dans le triangle I1OL1, on a :

J3O2 / I1L1 = OJ3 / OI1 = OO2 / OL1. On a donc en fonction de phi : J3O2 / 1 = (Phi - 1) / 1. **Conclusion** : J3O2 = Phi - 1.

10) Vérifier que 1/Phi = Phi - 1 revient à vérifier que 1 = Phi^2 - Phi

si on multiplie chaque membre de l'égalité par Phi.

Sachant que Phi = (1+sqrt(5))/2, on a Phi^2 - Phi = ((1+sqrt(5))/2)^2 - (1+sqrt(5))/2, Phi^2 - Phi = (1+sqrt(5))^2/4 - (1+sqrt(5))/2

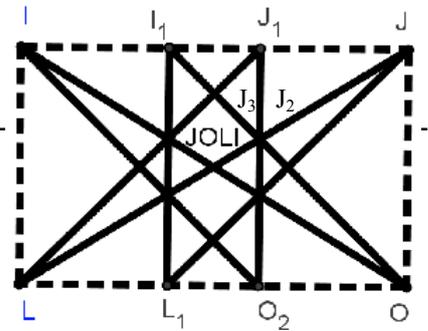
Phi^2 - Phi = (1^2 + 2*1*sqrt(5) + (sqrt(5))^2)/4 - (1+sqrt(5))/2, Phi^2 - Phi = (1 + 2*sqrt(5) + 5)/4 - (1+sqrt(5))/2, Phi^2 - Phi = (6 + 2*sqrt(5))/4 - (1+sqrt(5))/2

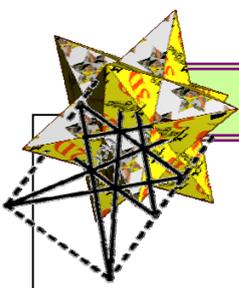
Phi^2 - Phi = (3 + sqrt(5))/2 - (1+sqrt(5))/2 **Conclusion** : pour Phi = (1+sqrt(5))/2, on a bien Phi^2 - Phi = 1 soit 1/Phi = Phi - 1.

10) Puisque 1/Phi = Phi - 1, alors J3O2 = Phi - 1 = 1/Phi = J2O2.

Or J3O2 = J2O2, J2 ∈ [J1O2] et J3 ∈ [J1O2],

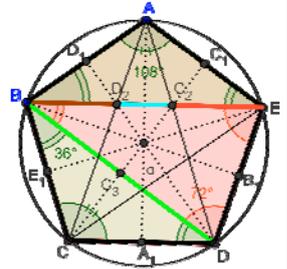
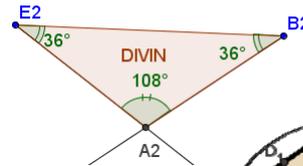
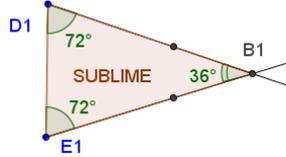
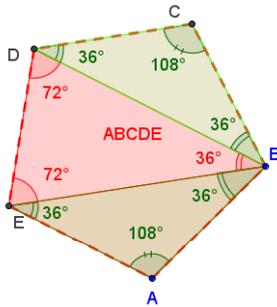
donc on peut dire que les points J2 et J3 sont confondus.





Activité 3 : voir le fichier joint : « nbre-or-art-sections-dorees.ggb »,

- 1) Description du pentagone régulier ABCDE : nature de ABCDE : un pentagone régulier convexe ; nombre de côtés : 5 ; longueurs des côtés : toutes les mêmes ; mesures des angles du pentagone : tous égaux à 108° .
- 2) Description du triangle EBD : nature de EBD : un triangle isocèle en B ; nombre de côtés : 3 ; longueurs des côtés : deux côtés de la même longueur ; angles : deux angles de mesure 72° et un angle de mesure 36° .
- 3) Description des triangles ABE et BCD : nature : des triangles isocèles respectivement en A et en C ; nombre de côtés : 3 ; longueurs des côtés : deux côtés de la même longueur ; angles : deux angles de mesure 36° et un angle de mesure 108° .



Activité 4 : voir le fichier joint : « nbre-or-art-sections-dorees.ggb ».

- 1) Les valeurs arrondies au millième sont : $\Phi^2 \approx 2,618$ et $\Phi^3 \approx 4,236$
Au-delà de ce qui précède, on peut remarquer que : $\Phi^0 + \Phi^1 = \Phi^2$, $\Phi^1 + \Phi^2 = \Phi^3$ c'est-à-dire que les différents termes des suites engendrées par le nombre d'or Φ peuvent s'obtenir de deux façons : en multipliant (ou en divisant) chaque terme par Φ ou en additionnant les deux termes qui précèdent (ou en soustrayant chaque terme au suivant).
- 2) Pour déterminer géométriquement le point O, centre du pentagone, on trace les médiatrices de chaque côté du pentagone. Elles se croisent en O qui est le centre du cercle circonscrit au pentagone ABCDE.
- 3) $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \widehat{EOA} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.
- 4) \widehat{AOE} est l'angle au centre qui intercepte le même arc que les angles \widehat{ABE} , \widehat{ACE} et \widehat{ADE} .
On constate que $\widehat{ABE} = \widehat{ACE} = \widehat{ADE}$ et que $\widehat{AOE} = 2 \times \widehat{ABE} = 2 \times \widehat{ACE} = 2 \times \widehat{ADE} = 2 \times 36^\circ$.
Ces constats sont en accord avec les définitions et les propriétés suivantes :

Définitions : ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE

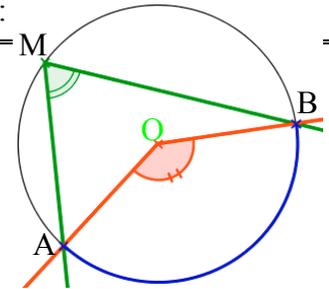
A, B et M sont trois points distincts d'un cercle C de centre O.

\widehat{AMB} est un **angle inscrit** dans le cercle C interceptant le petit arc de cercle \widehat{AB} .

\widehat{AOB} est l'**angle au centre** interceptant le même arc \widehat{AB} .

Propriété : Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc de cercle, alors ils ont la même mesure.

Propriété : dans un cercle, si un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc de cercle, alors la mesure de l'angle au centre est égale au double de celle de l'angle inscrit.



Activité 5 : voir le fichier joint : « nbre-or- fibonacci.ggb ».

- 1) $AB = 1$; 2) $FB = 1$; $\frac{FB}{AB} = 1$; 3) $CH = 2$; $\frac{CH}{FB} = 2$; 4) $DP = 3$; $\frac{DP}{CH} = \frac{3}{2} = 1,5$; 5) $TE = 8$; $\frac{TE}{DP} = \frac{8}{5} = 1,6$; 6) $VG = 13$; $\frac{VG}{TE} = \frac{13}{8} = 1,625$; 7) $XK = 21$; $\frac{XK}{VG} = \frac{21}{13} \approx 1,615$.

En continuant, on aurait $\frac{34}{21} \approx 1,619$ et $\frac{55}{34} \approx 1,618$. Or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

On dit que la limite en plus l'infini du rapport entre deux termes consécutifs (le plus grand sur le plus petit) tend vers Φ .

Les « trous d'aiguilles géométriques d'or » qui suivent sont à imprimer sur des transparents.

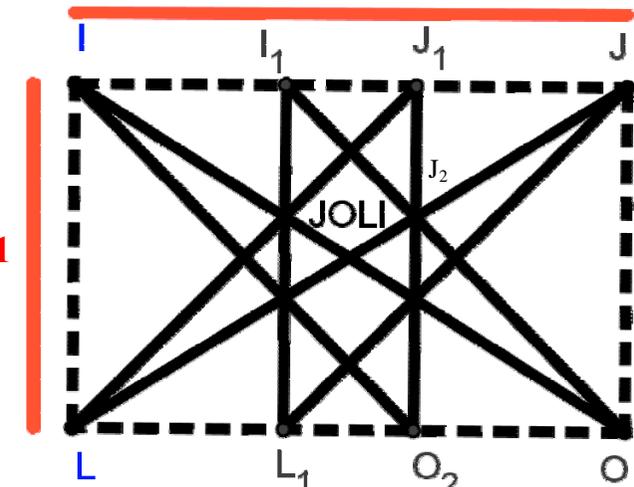


Valeur exacte du nombre d'or Phi :

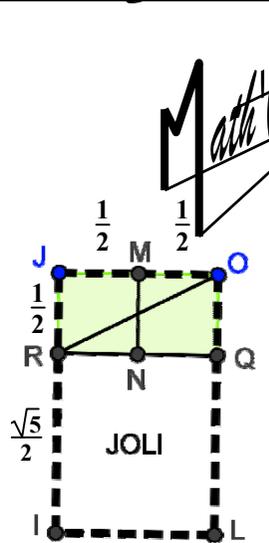
$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

« Trous d'aiguilles géométriques d'or »

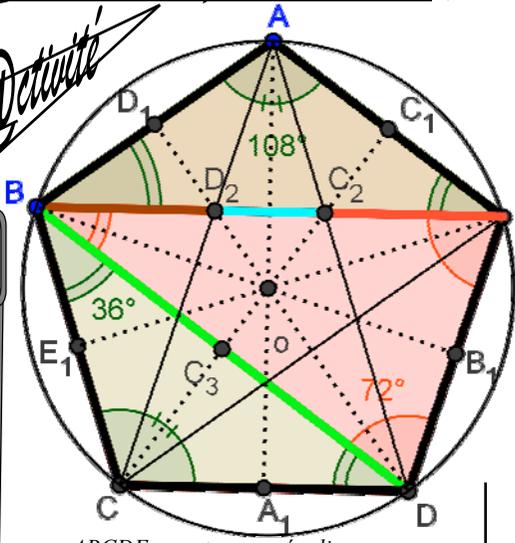
pour voir les sections dorées...



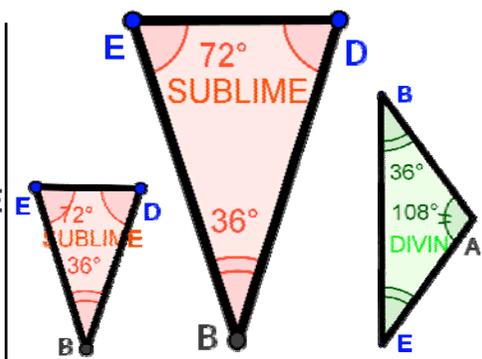
JOLI : rectangle d'or. $\frac{IJ}{LI} = \frac{IJ}{IJ_1} = \frac{JO}{O_2J_2} = \Phi$, $\Phi^2 = 1 + \Phi$, $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.



JOQR : rectangle de barlong et $JI = JR + RO$
 $JI = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \Phi$



ABCDE : pentagone régulier convexe
 ADDEC : pentagone régulier croisé ou « pentagramme ».
 $BE = AE \times \Phi = C_2E \times \Phi^2 = D_2C_2 \times \Phi^3$.
 $BE = AE + C_2E = (C_2E + D_2C_2) + C_2E$.



Triangles d'or :
 EBD serait le « sublime » et ABE le « divin ».



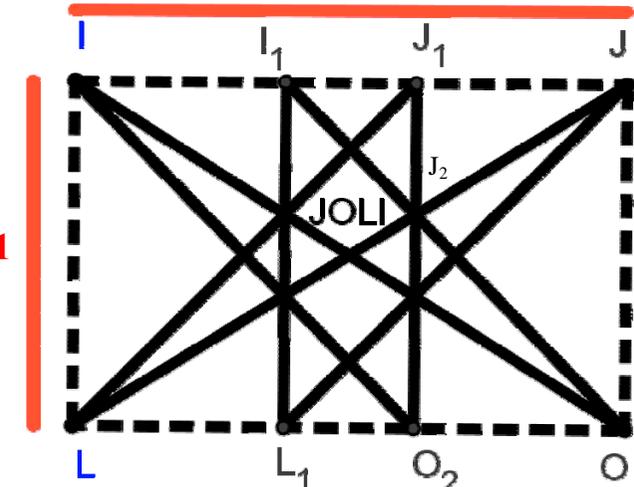
La suite de Fibonacci définie pour tout nombre entier naturel n, par $F_0=0$, $F_1=1$ et $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ engendre les nombres : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... La suite des quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ a pour limite le nombre d'or Φ .

Valeur exacte du nombre d'or Phi :

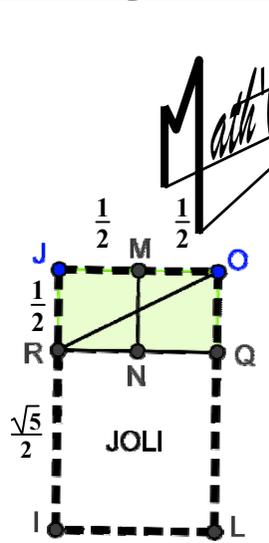
$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

« Trous d'aiguilles géométriques d'or »

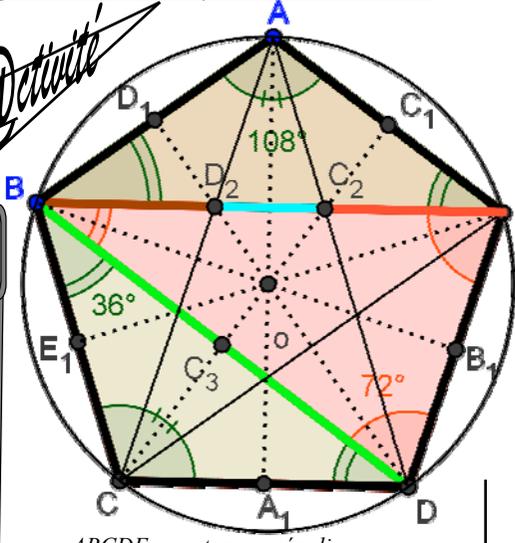
pour voir les sections dorées...



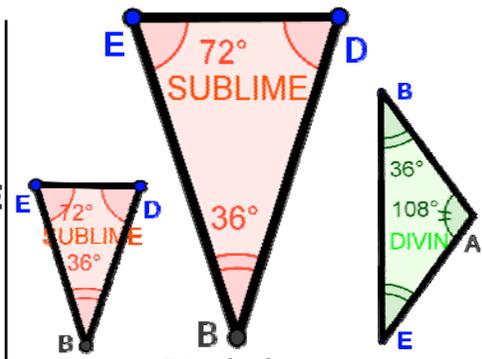
JOLI : rectangle d'or. $\frac{IJ}{LI} = \frac{IJ}{IJ_1} = \frac{JO}{O_2J_2} = \Phi$, $\Phi^2 = 1 + \Phi$, $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.



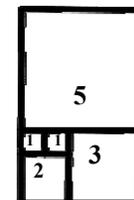
JOQR : rectangle de barlong et $JI = JR + RO$
 $JI = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \Phi$



ABCDE : pentagone régulier convexe
 ADDEC : pentagone régulier croisé ou « pentagramme ».
 $BE = AE \times \Phi = C_2E \times \Phi^2 = D_2C_2 \times \Phi^3$.
 $BE = AE + C_2E = (C_2E + D_2C_2) + C_2E$.



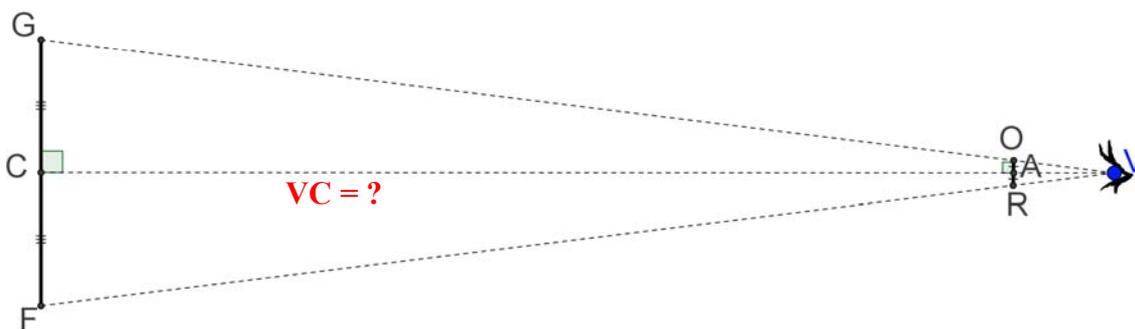
Triangles d'or :
 EBD serait le « sublime » et ABE le « divin ».



La suite de Fibonacci définie pour tout nombre entier naturel n, par $F_0=0$, $F_1=1$ et $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ engendre les nombres : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... La suite des quotients $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ a pour limite le nombre d'or Φ .

Activité 6 : voir les réponses du parcours mathématique.

Modélisation de la situation problème avec GeoGebra :

**Données :**

soient : V : la position de l'œil du visiteur, $[GF]$: la longueur du tableau, C : le milieu de $[GF]$, $[OR]$: la longueur du rectangle d'or de l'aiguille et A : le milieu de $[OR]$.

On a $GF = 80$ cm, $GC = CF = 40$ cm, $OR = 7,5$ cm, $OA = AR = 3,75$ cm et $VA = 30$ cm.

(GC) et (OA) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à une même 3^{ème} droite (CV) .

$O \in [VG]$ et $A \in [VC]$.

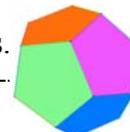
Or, d'après le théorème de Thalès, on a $\frac{VA}{VC} = \frac{VO}{VG} = \frac{OA}{GC}$ d'où $\frac{30}{VC} = \frac{3,75}{40}$, en utilisant le produit en croix, on

obtient $30 \times 40 = VC \times 3,75$ puis $VC = \frac{30 \times 40}{3,75} = 320$. **Conclusion : $VC = 320$ cm = 3,2 m.**

Le visiteur devra se positionner à 3,2 m du tableau et avoir son œil à la hauteur du centre du tableau.

Activité 7 : voir les fichiers joints ou dans l'espace « ressources » du Musée des beaux-arts de Rennes.

Activité 8 : voir la bibliographie et les liens Internet cités dans le parcours mathématiques.

**Activité 9 : du dodécaèdre au petit dodécaèdre étoilé.**

- 1) Description d'un dodécaèdre : nature des faces : pentagone régulier (elles sont toutes identiques) ; nombre de faces : 12 ; nombre d'arêtes : 30 ; nombre de sommets : 20. La relation d'Euler est satisfaite : $S + F - A = 2$.
- 2) Lien entre un dodécaèdre et le nombre d'or : voir activité 3.
- 3) Voir un programme de construction et un patron sur le site : <http://www.mathactivite.fr>
- 4) Description d'un petit dodécaèdre étoilé : nature des faces : pentagone étoilé régulier (elles sont toutes identiques) ; nombre de faces : 12 ; nombre d'arêtes : 30 ; nombre de sommets : 12. Il est l'un des « oursins » de Johannes Kepler.
- 5) Lien entre un petit dodécaèdre étoilé et le nombre d'or : voir activité 4.
- 6) Voir un programme de construction et un patron sur le site : <http://www.mathactivite.fr>
- 7) Au regard des activités 6 et 7 faites précédemment et des photos, il semblerait que Georges Folmer ait voulu représenter une partie d'un petit dodécaèdre étoilé se mêlant aux diagonales des carrés et du rectangle intérieurs au rectangle d'or. Un pentagone régulier convexe peut paraître irrégulier s'il est observé selon un autre point de vue que celui de face. Sa représentation, en dehors des mathématiques comme pour une photographie et la plus part des tableaux, sera linéaire et non cavalière.

**Activité 10 : du tétraèdre et de l'octaèdre à l'étoile de Kepler.**

Une étoile de Képler (stella octangula) qui est l'autre « oursin » de Johannes Kepler.

Voir un programme de construction et un patron sur le site : <http://www.mathactivite.fr>

Le volume de cette étoile de Kepler est environ **38,184 cm³**. Et **sa valeur exacte** est :

$$V = V_{\text{cube}} - V_6 \text{ pyramides régulières (base carrée) d'arêtes } 3\text{cm} = (\sqrt{18})^3 - 18\sqrt{\frac{9}{2}} = 27\sqrt{2} \text{ cm.}$$



Des infos sur le site : <http://www.mathactivite.fr>



Le NOMBRE D' Φ dans des œuvres de Georges FOLMER

Mathématiques et histoire des arts...

Parcours mathématique de l'exposition temporaire d'œuvres de Georges Folmer au musée des beaux-arts de Rennes - Rennes, du 10 février au 23 mai 2010.

Document de Carole LE BELLER, professeure de mathématiques.

Sommaire

Préambule avec une courte notice des « trous d'aiguilles géométriques d'or »

p.1

- ◆ 4 œuvres du parcours :
 - 1 933-35 – Cruche au polyèdre noir
 - 1 936-38 – Fleurs d'or
 - 1 941-42 – Symphonie harmonique
 - 1 940-42 – Composition bleue

p.2 et 3

- ◆ Bibliographie.
Quelques liens Internet.

p.3

- ◆ Petit lexique pour tous...

p.4

Après... & Coordonnées.

p.4

« Trous d'aiguilles » à imprimer sur des feuilles transparentes.*

Préambule

Après avoir réalisé des activités et calculs conduisant à la construction des figures géométriques d'or ci-dessous avec le logiciel de géométrie dynamique « GeoGebra », le nombre d'or commence à intriguer. Ce parcours mathématique de l'exposition temporaire d'œuvres de Georges Folmer, artiste peintre (1895-1977) (cf. dossier ressources arts plastiques sur le site du musée) permet de découvrir dans des peintures l'utilisation de cette « **divine proportion** » appelé ainsi par Luca Pacioli dans son livre *Divine proportion* (Venise, 1509) illustré par Léonard de Vinci qui la désigna par l'expression *sectia aurea* : « **section dorée** ».

Les « trous d'aiguilles » ci-dessous permettront, en se plaçant à une bonne distance des œuvres, en fermant un œil et en regardant avec l'autre au travers chaque figure comme dans un trou d'aiguille, de superposer des polygones singuliers sur les œuvres et de découvrir des diagrammes semblant avoir été établis par Georges Folmer.

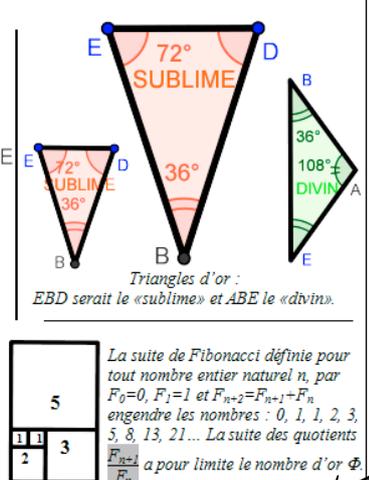
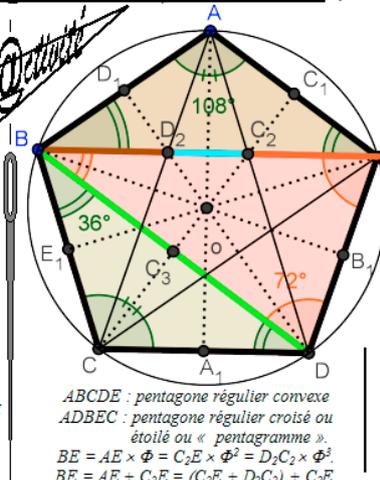
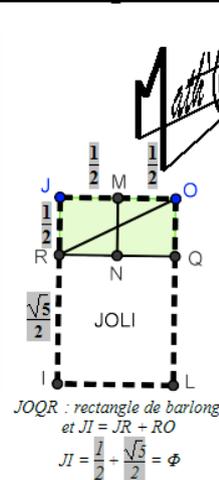
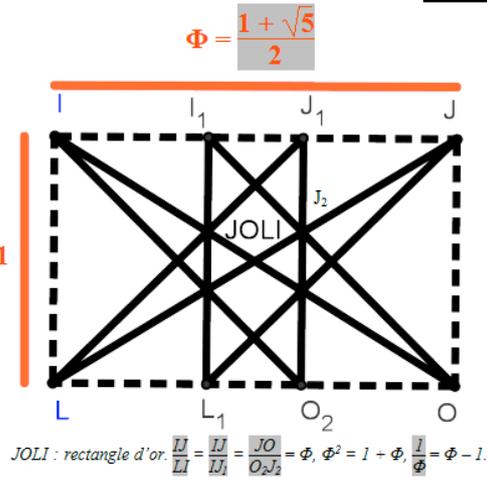
Ces constats ne pourront être que des hypothèses de construction des tableaux car sans écrits de Georges Folmer à ce sujet, ni les trous d'aiguilles, ni un travail de superposition numérique effectué à la suite du parcours, n'auront valeur de preuve.

Valeur exacte du nombre d'or Phi :

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

« Trous d'aiguilles géométriques d'or »

pour voir les sections dorées...



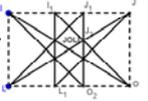
* : téléchargement du fichier sur le site : <http://www.mathactivite.fr>



Œuvres :

1) **1 933-35 – Cruche au polyèdre noir**⁽¹⁾ – Mesures de l'œuvre : 64 × 92 cm

Indice :



Quels semblent être les solides posés sur la table ?

Réponse : seuls des morceaux des solides suivants sont visibles : une sphère ou plutôt une boule, un cylindre, un octaèdre (polyèdre à 8 faces) et un petit dodécaèdre étoilé (cassé ou inachevé ?). Ce dernier a un lien avec le nombre d'or.

La perspective utilisée est-elle cavalière ? Pourquoi ?

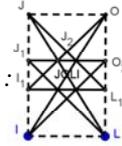
Réponse : ce n'est pas une représentation en perspective cavalière car les côtés opposés de la boîte ne sont pas parallèles.

A l'aide des « trous d'aiguilles géométriques d'or », se placer à une bonne distance pour superposer sur l'œuvre le « rectangle d'or ». Puis, sur l'image ci-contre, le dessiner à main levée avec les diagonales mettant en évidence des rapports d'or.

Voir réponse avec l'animation GeoGebra (logiciel de géométrie dynamique) sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

2) **1 936-38 – Fleurs d'or**⁽¹⁾ – Mesures de l'œuvre : 80 × 65 cm

Indice :



A l'aide des « trous d'aiguilles géométriques d'or », se placer à une bonne distance pour superposer sur l'œuvre le « rectangle d'or ». Puis, sur l'image ci-dessous, le dessiner à main levée avec les diagonales mettant en évidence des rapports d'or.

Sur les zooms, après avoir repéré des triangles d'or (dits « sublime » et « divin »), un rectangle d'or autre que le précédent, la moitié d'un trapèze d'or (partie du pentagone régulier convexe) et une suite de carrés additifs correspondant aux premiers termes de la suite de Fibonacci, les dessiner à main levée.

Voir réponse avec l'animation GeoGebra (logiciel de géométrie dynamique) sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Zoom 1 : la moitié d'un trapèze d'or.

Voir réponse avec l'animation GeoGebra (logiciel de géométrie dynamique) sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Voir réponse avec l'animation GeoGebra (logiciel de géométrie dynamique) sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Zoom 3 : suite de Fibonacci.

Voir réponse avec l'animation GeoGebra (logiciel de géométrie dynamique) sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Zoom 2 : des triangles d'or et un rectangle d'or.

Remarque : il se trouve qu'au centre, Georges Folmer a dessiné 2 rectangles et non des carrés, mais ces derniers constituent néanmoins un rectangle de barlong.

Quels semblent être les solides bleus dessinés dans cette œuvre ?

Réponse : les solides dessinés semblent être des cônes.

Sont-ils tous de révolution ? Pourquoi ? Réponse : non, ils ne sont pas tous de révolution car pour beaucoup, leur hauteur n'est pas perpendiculaire à leur disque de base et donc ces cônes ne sont pas tous générés par des triangles rectangles en rotation. Georges Folmer a peut-être représenté des sections de cônes.

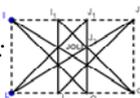
Combien semble-t-il y en avoir de révolution ? Réponse : il semble y avoir deux cônes de révolution dans cette œuvre.



3) 1 941-42 – Symphonie harmonique⁽¹⁾ -

Mesures de l'œuvre : 70 × 88 cm

Indice :

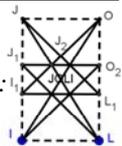


A l'aide des « trous d'aiguilles géométriques d'or », se placer à une bonne distance pour superposer sur l'œuvre le « rectangle d'or ». Puis, sur l'image ci-dessous, le dessiner à main levée avec les diagonales mettant en évidence des rapports d'or.

Voir réponse avec l'animation GeoGebra (logiciel de géométrie dynamique) sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

4) 1 940-42 – Composition bleue⁽¹⁾ Indice :

Mesures de l'œuvre : 48 × 46 cm



A l'aide des « trous d'aiguilles géométriques d'or », se placer à une bonne distance pour superposer sur l'œuvre le « rectangle d'or ». Puis, sur l'image ci-dessous, le dessiner à main levée avec les diagonales mettant en évidence des rapports d'or.

Dans cette œuvre, quelle est la nature de la figure bleue la plus grande qui contient toutes les autres ?

Réponse : un pentagone régulier convexe (cinq côtés de même longueur et cinq angles de même mesure 108°).

A l'aide des « trous d'aiguilles géométriques d'or », se placer à une bonne distance pour superposer sur l'œuvre la figure précédente. Puis, sur l'image ci-dessous, tracer à main levée ses diagonales. Que constate-t-on ?

Réponse : les diagonales du pentagone régulier semblent se laisser deviner dans cette œuvre.

Voir réponse avec l'animation GeoGebra (logiciel de géométrie dynamique) sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Voir réponse avec l'animation GeoGebra (logiciel de géométrie dynamique) sur le site Internet du Musée des beaux-arts de Rennes : www.mbar.org dans la rubrique « ressources ».

Bibliographie

⁽¹⁾ **Georges Folmer (1895-1977)** catalogue du Musée des beaux-arts de Rennes .

Georges Folmer (1895-1977) A retrospective catalogue en anglais, WATERHOUSE & DOD, London 15th April - 2nd May 2008.

Encyclopédie méthodique Larousse, tome 2, 1955, chapitre « Géométrie » page 96 à 99 : « Rapports et faisceaux harmoniques », page 97 : pleine page, œuvre de Folmer « Symphonie harmonique », édition refondue du Grand Mémento publié sous la direction de Paul Augé.

Divine proportion de Fra Luca Pacioli di Borgo San Sepolcro (1 509) – 2^{ème} édition française, traduction de G. Duchesne et M. Giraud, avec la collaboration de M.-T. Sarrade, les Compagnons du devoir, Librairie du Campagnonnage, 25 novembre 1 988.

Le nombre d'or d'André Deledicq, édition « Les malices du Kangourou », janvier 2 006 : un petit livret où l'on trouve l'essentiel, mais aussi quelques curiosités, pour faire connaissance avec ce nombre que l'on dit d'or. Entre autres : la divine proportion, les nombres et la géométrie de l'homme, le partage d'or, la construction du rectangle d'or, la peinture est d'or, les rectangles célèbres, l'unité d'angle d'or, le trièdre doré, la suite de Fibonacci, les puzzles d'or, les solutions aux problèmes, etc.

Géométrie du nombre d'or de Robert Vincent, Chalagram édition, 3^{ème} impression mars 2 001 : en partant de la corde et de la quine des bâtisseurs du Moyen-âge, Robert Vincent, par l'art du trait et sans grand outillage mathématique, ouvre les mystères du nombre d'or et expose des bijoux de la géométrie. Il rappelle des tracés antiques, souvent emblématiques et montre la présence du nombre d'or dans l'œuvre humaine (de la pyramide de Khéops au ballon de football).

Le nombre d'or de Marguerite Neveux & H.E. Huntley, collection Points Sciences, Editions du seuil, octobre 1995. Radiographie d'un mythe, suivi de La divine proportion.

Le nombre d'or, la divine proportion de Marius Cleyet-Michaud, Que sais-je ? n° 1530, Puf, 13^{ème} édition, mai 2 009.

Nombre d'or et Mathématiques de Christian Hakenholz, Chalagram édition, 2^{ème} impression juin 2 007.

Le mystère des nombres d'André Warusfel, collection Points Sciences, Editions du seuil, octobre 1 961.

Quelques liens Internet :

www.mbar.org : Site du Musée des beaux-arts de Rennes.

<http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/index.htm> : les mathématiques magiques : venez au pays des Mathématiques magiques malicieuses et... très sérieuses de Thérèse EVEILLEAU dont http://pagesperso-orange.fr/THERESE.EVEILLEAU/pages/truc_mat/ un site magnifique !!

[Http://irem-old.univ-lille1.publications/fascicules/pentaetats.pdf](http://irem-old.univ-lille1.publications/fascicules/pentaetats.pdf) : lien vers un document « Le pentagone dans tous ses états » de David Boutry.

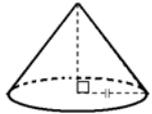
<http://123portail.education.free.fr/zip/6eme/initiation-geogebra-6-5.zip> : une initiation GeoGebra 6^{ème}-5^{ème}.

<http://www.mathactivite.fr> : dans mon site perso, vous trouverez essentiellement des activités mathématiques, "Math'@ctivités", ludiques et de construction pour tous, du concret au virtuel et du virtuel au concret : numériques, 2D, 3D et mouvement.



Petit lexique pour tous...

Cône : c'est un solide limité par une surface conique et par un plan qui ne passe pas par le point de rencontre des génératrices



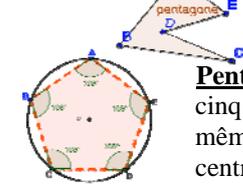
Cône de révolution : solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un de ses deux côtés de l'angle droit.

Octaèdre : polyèdre à huit faces.



Les faces de l'octaèdre régulier sont des triangles équilatéraux.

Pentagone : polygone à cinq côtés. Le pentagone ci-après est concave.

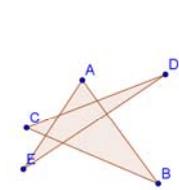


Pentagone régulier convexe : polygone ayant ses cinq angles de même mesure et ses cinq côtés de même longueur. Il est inscrit dans un cercle de centre le centre du pentagone.

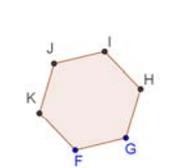
Pentagone étoilé : polygone étoilé (ou croisé) à cinq côté, « cinq branches ». Il existe un seul pentagone étoilé régulier, qui est appelé « *pentagramme* ».



Polygone : figure géométrique plane fermée composée de segments de droite appelés côtés. Exemple : *pentagone concave* (voir plus haut).



Polygone étoilé : polygone dont les angles sont alternativement saillants et rentrants, et dont les côtés forment une ligne brisée continue et fermée. Le polygone étoilé est régulier quand ses sommets sont les mêmes que ceux d'un polygone régulier et tous ses côtés ont même longueur. Exemple de *polygone étoilé régulier* : le *pentagone étoilé régulier*.



Polygone régulier : un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et dont tous les angles ont la même mesure ou un polygone équilatéral inscrit dans un cercle. Exemple du *pentagone régulier*. Exemples : *triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, hexagone régulier ci-contre, etc.*

Polygone convexe : un polygone n'étant traversé par aucune des droites qui supportent ses côtés.

Perspective cavalière : la perspective cavalière est une manière de représenter en deux dimensions des objets en trois dimensions (objets en volume). Cette représentation ne présente pas de point de fuite, la taille des objets ne diminue pas lorsqu'ils s'éloignent. Les segments visibles sont dessinés en traits pleins, les autres sont dessinés en pointillés. Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles. Il y a conservation de l'alignement des points et conservation des rapport de longueurs.

Petit dodécaèdre étoilé : l'un des « oursins » de Kepler baptisé par Cayley (1821-1895) « petit dodécaèdre étoilé ». C'est un polyèdre dont les douze faces sont des pentagones étoilés et n'est donc pas convexe.



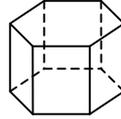
Coordonnées téléphoniques :

(Demander de pouvoir joindre Carole LE BELLER)
CLG Les Ormeaux à Rennes ☎ : 02.99.51.48.51

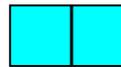
Il ne satisfait pas à la relation d'Euler ($S + F - A = 2$) car il a 12 sommets, 12 faces et 30 arêtes ($12 + 12 - 30 \neq 2$).

Polyèdre : solide limité par des faces planes polygonales. Les côtés des faces sont les arêtes du polyèdre ; chaque arête est commune à deux faces. Les extrémités des arêtes sont les sommets du polyèdre ; chaque sommet est commun à trois arêtes ou plus. Le nombre minimal de faces nécessaire pour 'enfermer' un espace fini est de quatre : le polyèdre minimal est donc le tétraèdre. **Polyèdre régulier :** un polyèdre inscrit dans une sphère et dont les faces sont isométriques.

Prisme droit : un prisme droit est un solide qui a deux faces superposables et parallèles qui sont des polygones. On les appelle les bases. Les autres faces sont des rectangles, appelés faces latérales.



Rectangle de Barlong : un rectangle composé de deux carrés superposables accolés. Sa largeur est la longueur du carré et sa longueur est le double du côté du carré.



« **Rectangle d'or** » : cf. : « trous d'aiguilles géométriques d'or » joints.

Section de cône : une section de cône est l'intersection d'un plan et d'un cône. On coupe le cône. La section est alors soit un cercle, une ellipse autre qu'un cercle, une hyperbole, une parabole ou un point (ce sont des coniques).

Solides de Platon : tétraèdre, cube (hexaèdre), octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre.

Sphère : une surface dont les points sont équidistants d'un point O appelé centre de la sphère. Une boule est un solide, un « intérieur plein » d'une sphère.

Suite de Fibonacci : une suite de nombres définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Chaque terme est la somme des deux précédents. Cet ensemble de nombre débute par {0 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; ...} et a un lien avec le nombre d'or (cf. : « trous d'aiguilles géométriques d'or » joints).

Triangles d'or dont « divin » & « sublime » : cf. : « trous d'aiguilles géométriques d'or » joints.

Réalisation du document, des figures (avec les logiciels *GeoGebra* et *Great Stella*) et de certaines définitions de **Carole LE BELLER**, professeure de mathématiques au collège Public Les Ormeaux à Rennes, à partir du « *Dictionnaire de mathématiques élémentaires* » de Stella Baruk, Editions du Seuil, septembre 1992 et d'autres livres de la bibliographie jointe. Documents en téléchargement sur son site personnel *Math'@ctivité* à l'adresse <http://www.mathactivite.fr>. Avec la participation d'Hema Rilling, professeure de mathématiques au collège Public Les Ormeaux à Rennes, uniquement pour l'écriture de certaines définitions du « *Petit lexique pour tous...* » à partir du livre de géométrie : « *AUDIN – Géométrie- Belin* » et des sites internet : « www.recreamath.qc.ca », « www.netmaths.net » et « www.wikipedia.org ».

Après...

Ce parcours mathématique est ensuite réinvesti. Ayant construit les figures des « trous d'aiguilles géométriques d'or » avec le logiciel de géométrie dynamique « *GeoGebra* », on intégrera à ces fichiers informatiques les images des œuvres une à une. Ainsi, en bougeant les rares points libres des figures, on pourra les superposer aux œuvres et affiner les hypothèses d'analyse et, peut-être, trouver d'autres sections dorées...

Mars 2010.