

Un ARBRE de PYTHAGORE qui pousse comme un cheveu

Carole LE BELLER & Christophe PEPINO



Objectifs	<p>Privilégier une démarche d'investigation en mathématiques pour :</p> <ul style="list-style-type: none"> - permettre à chaque élève de s'engager rapidement dans une recherche, mettre en commun ses réflexions, et se répartir le travail au sein d'un groupe, dans l'objectif de construire un arbre de Pythagore (ou plusieurs arbres assemblés) avec une classe (ou plusieurs classes) - découvrir l'idée de fractale par la géométrie plane, et explorer des fractales générées par un logiciel spécifique.
Connaissances et compétences en jeu	<p>Connaissances utilisées en mathématiques :</p> <ul style="list-style-type: none"> - géométrie dans le plan dont le vocabulaire et les propriétés de la géométrie plane, et des constructions géométriques de figures particulières telles que le carré, le triangle rectangle, le triangle rectangle isocèle, en utilisant ou non : la symétrie axiale, la médiatrice d'un segment, le cercle circonscrit au triangle rectangle, et les angles - égalité de Pythagore dans le plan - valeur exacte et valeur arrondie - agrandissement et réduction : échelles, longueurs, aires - éventuellement : encadrement, ordre et opérations - calcul littéral et équations dont produit en croix - puissances - En 3^{ème} : racines carrées, racine carrée de 2, algorithmique - Au lycée et après : suites, suites géométriques, sommes, algorithmique, transformations dans le plan, dimensions fractales <p>Compétences :</p> <ul style="list-style-type: none"> - observer, rechercher, organiser les informations - (modéliser), réaliser, manipuler, mesurer, calculer, conjecturer, démontrer - communiquer à l'aide d'un langage adapté <p>Utiliser les TICE :</p> <ul style="list-style-type: none"> - pour découvrir l'univers de fractales avec <i>Tiera Zon</i> - pour modéliser l'arbre avec un logiciel de géométrie dynamique comme <i>GeoGebra</i> - pour programmer un algorithme avec un tableur comme celui de <i>GeoGebra</i> ou avec un logiciel pédagogique d'initiation à l'algorithmique comme <i>AlgoBox</i> <p>Histoire des arts : l'art fractal</p>
Niveau(x)	4 ^{ème}

conseillé(s)	Niveaux également possibles : 3 ^{ème} , lycée et après pour certaines notions précitées.
Matériel nécessaire	<p>A prévoir par le professeur :</p> <ul style="list-style-type: none"> - feuilles (si possible de couleur) pour des pièces suivantes : blanc : 32 figures (16 feuilles A4), jaune : 16 figures (8 feuilles A4), orange clair : 8 figures (4 feuilles A4), orange plus foncé : 4 figures (4 feuilles format A4), rouge : 2 figures (1 feuille format raisin), marron foncé : 1 figure (1 feuille format raisin), noir 1 (papier kraft en rouleau par exemple) (uniquement si deux arbres ou plus sont faits : 1) ou simplement un rouleau de papier kraft blanc pour l'ensemble de l'arbre à colorier par les élèves - photocopies de la fiche faite pour quatre élèves <i>Figure, itération 2</i> et des arbres au format A3 pour chaque élève (cf. <i>Fiches jointes</i>) - mètre enrouleur, ruban adhésif, pâte à fixe - un vidéoprojecteur pour projeter des images de fractales ou un diaporama, et les explorations fractales des élèves - ordinateurs (dans l'idéal un par élève) avec les logiciels : <i>Tiera Zon</i> (http://1998.tierazon.com/Tierazon/Tierazon.html), <i>GeoGebra</i> et <i>AlgoBox</i> <p>A prévoir par les élèves : calculatrice, règle, compas, équerre, rapporteur, crayon à papier, gomme, ciseaux, et éventuellement crayons de couleur.</p>
Durée	<p>En 4^{ème} : 6 séances espacées dans l'année scolaire (30 min + 20 min + 1 s. + 2 s. + 1s. + 1 s.)</p> <p>En 3^{ème} : ajouter 1 séance pour les racines carrées dont celle de 2</p> <p>Au lycée : ajouter le temps nécessaire pour l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique et d'algorithmique</p>
Organisation de la classe	<p>Par groupes pour les phases 1 à 4</p> <p>Individuel ou par binômes pour la phase 6</p>
Déroulement	<p>Par groupes</p> <p><u>Phase 1</u> Sans avoir besoin de connaître l'égalité de Pythagore, chaque élève construit la <i>figure 1, itération 2</i>. Chaque groupe, de concert, communique ses différentes méthodes de construction à la classe. Les figures terminées (une figure par élève) sont conservées par le professeur.</p> <p><u>Phase 2</u> Les élèves participent à un brainstorming animé par le professeur pour faire émerger les questions des élèves concernant la construction d'un arbre de Pythagore présenté au vidéo-projecteur.</p> <p><u>Phase 3</u> Pour savoir où placer l'arbre, les élèves cherchent un ordre de grandeur pour conjecturer la réponse et calculent ses dimensions pour démontrer. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut être demandée par les élèves. Le professeur conduit le temps d'échanges sur les différentes stratégies mises en œuvre. A la maison, les élèves terminent les calculs nécessitant l'égalité de Pythagore.</p>

	<p>En 3^{ème}, les résultats exacts peuvent être écrits sous la forme d'une expression comportant la racine carrée de 2.</p> <p>L'étude algorithmique des dimensions et des aires de l'arbre aux n itérations peut être envisagée au lycée ou après.</p> <p><u>Phase 4</u></p> <p>Pour la construction de l'arbre, le professeur organise la classe avec les suggestions des élèves. Puis chaque groupe se répartit les tâches pour : calculer, construire, dénombrer, et assembler (avec du ruban adhésif seulement sur une face de l'arbre). Le professeur, médiateur, passe dans les groupes. En dehors de l'heure de cours, les élèves colorient l'arbre. Aidés du professeur, ils le fixent au mur ou au plafond avec de la pâte à fixe en partant de sa base.</p> <p><u>Phase 5</u></p> <p>Le professeur fait découvrir la notion de fractale par la vidéo-projection d'images fractales ou d'un diaporama, et fait décortiquer aux élèves un chou romanesco (si c'est la saison). Le professeur met en évidence les liens vers l'art fractal. Plus tard, l'arbre est exploité dans les calculs de puissance de 2 pour dénombrer les carrés de même longueur de côté et les carrés semblables.</p> <p><u>Phase 6</u></p> <p>Le professeur fait la présentation technique du logiciel <i>Tiera Zon</i>, et les élèves l'utilisent pour générer des fractales et les explorer avec la fonction zoom et les variables de couleur.</p> <p>Durant toutes les phases, l'enseignant a un rôle de médiateur, de formateur technique, et de « stimulateur intellectuel ».</p>
Exploitation et bilan	Cf. fichiers joints : article <i>Un arbre de Pythagore</i> (genèse, évolution, solutions, bilan), annexes, fichiers dynamiques, et bilans de l'activité
Notre avis	Cette activité, une fois lancée est assez rapide et appréciée des élèves
Idées/astuces/conseils	Il existe d'autres arbres de Pythagore pouvant être construits.
Adaptation possible	A la place des carrés, il est possible de construire d'autres formes semblables en respectant les aires. La construction d'autres types d'arbres de Pythagore peut être envisagée.
Fichiers joints	<p><u>Fichiers joints :</u></p> <ul style="list-style-type: none"> - Le Beller, C., <i>Un arbre de Pythagore qui pousse comme un cheveu</i> (la genèse, l'évolution, la description, les solutions et le bilan de l'activité), un article de 18 pages : un-arbre-de-pythagore-c_le_beller.pdf - les fiches annexes : figure (itération 2), arbre de Pythagore (itération 7), quatre arbres de Pythagore (itération 7) sur une même page, arbre de Pythagore (itération 8), arbre de Pythagore (itération 9), fiche <i>Fractale – Arbre de Pythagore 1 de Math'@ctivité 2D</i> : un-arbre-de-pythagore-c_le_beller-les-annexes.pdf - le fichier dynamique algorithmique simple : un-arbre-de-pythagore-c_le_beller-dim-nbres_alg.html - les images animées (gif) de 3 arbres de Pythagore différents - le bilan de l'activité testée par Christophe Pépino (en pdf).